

Modélisation par éléments finis du chauffage infrarouge des membranes thermoplastiques semi-transparentes

F. Erchiqui ^{a,*}, I. Hamani ^a, A. Charette ^b

^a Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue, 445, boul. de l'Université, Rouyn-Noranda (Québec), Canada, J9X 5E4

^b Université du Québec à Chicoutimi, 555 boul. Université, Chicoutimi (Québec), Département des sciences appliquées (Chicoutimi), Canada, G7H 2B1

Reçu le 21 février 2007 ; reçu en forme révisée le 28 février 2008 ; accepté le 4 mars 2008

Disponible sur Internet le 14 avril 2008

Résumé

Dans cette étude, nous avons établi par la méthode des éléments finis en trois dimensions une approche simplifiée pour analyser l'évolution de la température au sein d'une membrane semi-transparente de type polyéthylène téréphthalate (PET) amorphe, exposées à une source radiative. En se basant sur le comportement optique du PET, un transfert radiatif monodirectionnel, suivant l'épaisseur de la membrane est considéré. Des simulations numériques ont permis de confronter et de valider les résultats obtenus vis-à-vis des résultats analytiques et expérimentaux. Comme application, nous avons étudié le chauffage d'une feuille thermoplastique en PET exposée à une source radiative infrarouge.

© 2008 Publié par Elsevier Masson SAS.

Abstract

This paper reports on a simplified approach for analysing the temperature evolution in a semi-transparent thin membrane of the amorphous polyethylene terephthalate type (PET) exposed to a radiative source. It is based on a 3D finite elements method. The thermophysical properties of the PET are assumed independent of temperature while the internal radiative intensity absorption is taken as one-dimensional and is governed by the Beer–Lambert law. To avoid the difficult problem of computing the shape factors, a semi-analytical approach is used. Finally, the numerical simulations have allowed to validate the analytical and experimental results.

In the first place, we have written the energy conservation equation in absence of convection (based on the first law of thermodynamics) (1.a), the radiative source term (1.b) and the boundary conditions (2). As for the finite elements method, the Galerkin approach is used for the formulation of the 3D heat transfer equation (3) and the diagonalisation of the heat capacity matrix, “lumped matrix”, is adopted [M.A. Dokainish, K. Subbaraj, A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics, *Comput. Struct.* 32 (6) (1989) 1371–1386]. A single step implicit time integration scheme is used for the computation [M.A. Dokainish, K. Subbaraj, A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics, *Comput. Struct.* 32 (6) (1989) 1371–1386]. After recalling the classical expressions for the radiative flux divergence (5) and the flux itself (6), we have rewritten the radiative source term for an homogeneous medium as a function of spectral intensity (7) and given the integro-differential equation of radiative transfer [R. Siegel, J.R. Howell, *Thermal Radiation Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1992], Eq. (8). The spectral relations linking coefficients of extinction, absorption, scattering and scattering albedo are given by Eqs. (9) and (10), while Eq. (11) expresses the boundary conditions.

In the second place, on the basis of the non-scattering behaviour of amorphous PET [K. Esser, E. Haberstroh, U. Hüsgen, D. Weinand, *Infrared radiation in the processing of plastics: Precise adjustment—the key to productivity*, *Adv. Polymer Technol.* 7 (2) (1987) 89–128; M.D. Shelby, Effects of infrared lamp temperature and other variables on the reheat rate of PET, in: *Proceedings of ANTEC'91 Conference*, 1991, pp. 1420–1424; G. Venkateswaran, M.R. Cameron, S.A. Jabarin, Effect of temperature profiles through preform thickness on the properties of reheat-blown PET containers, *Adv. Polymer Technol.* 17 (3) (1997) 237–249], we have assumed that extinction and absorption coefficients are equal, the corresponding albedo being zero. The radiative transfer equation can thus be rewritten in a reduced form (12). Moreover, for the temperature range prevailing in the processes of PET thermoforming and preforms blowing, temperatures of radiation sources are generally much higher than those used for the forming of these thermoplastic media. Under these conditions, the cold medium hypothesis is used [Y. Le Maoult, F.M. Schmidt, V. Laborde, M. El Hafi, P. Lebaudy, *Measurement and calculation of preform infrared heating: a first approach*, in: *Proceedings of*

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : fouad.erchiqui@uqat.ca (F. Erchiqui).

the Fourth International Workshop on Advanced Infrared, 1997, pp. 321–331], which allows to express transmission of spectral intensity across the material as a function of position and direction (13), and to write the radiative flux divergence in a simplified form as well (14). For one-dimensional radiation, solution of the radiative transfer equation [R. Siegel, J.R. Howel, Thermal Radiation Heat Transfer, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1992] is given by Eq. (15), which combines with Eq. (14) to yield the spectral flux generated inside the semi-transparent medium, Eq. (16). In case of radiation propagation in the same direction as the normal to the polymeric membrane surface, radiation intensity can then be expressed by the Beer–Lambert law (17). This permits to deduce the expression of spectral flux transmitted across the PET membrane thickness (18).

Infrared radiation intercepted by the membrane

For determining the infrared radiation intercepted by the membrane surface, the medium between the radiation source and the thermoplastic material is assumed to be completely transparent to radiation. It is also assumed that the surface of the source is diffuse. This allows to infer, from spectral expressions of the energy emitted by the source (Eqs. (19) and (20)) and of the energy received by the semi-transparent membrane (Eq. (21)), a relation for radiation intercepted by the surface at all wavelengths (Eqs. (22) and (23)). For an isotropically radiating source (Lambertian source) when considering an average emissivity of the heating source, Eq. (24), total radiation intercepted by the surface is given by Eq. (25).

Infrared radiation absorbed by the membrane

For the determination of infrared radiation absorbed by the polymeric membrane, first, based on the principle of energy conservation, spectral relation (27) which links reflectivity, absorptivity and transmissivity is recalled, as well as relation (28) associating spectral absorption and transmission coefficients following the Beer–Lambert law. Consequently, this allows to find the spectral energy absorbed by the semi-transparent medium (29) with the aid of Eq. (25). Concentrating on wavelength bands that constitute the transmission spectrum of the medium, Eq. (29) is then replaced by Eq. (30) where average values of reflectivity (31) and transmissivity (32) are considered. As a result, the volumetric total energy absorbed by the medium, the flux divergence, is then given by Eqs. (33) and (34). Furthermore, considering that reflectivity is low for polymeric materials (generally lower than 5%), the latter is neglected leading to Eq. (35) instead of Eq. (34). Fig. 1 illustrates a typical transmissivity curve for PET [G. Venkateswaran, M.R. Cameron, S.A. Jabarin, Effect of temperature profiles through preform thickness on the properties of reheat-blown PET containers, *Adv. Polymer Technol.* 17 (3) (1997) 237–249].

Shape factor

In order to take into account arbitrary shapes of sources and preforms, a semi-analytical approach is used for the computation of shape factors [G. Venkateswaran, M.R. Cameron, S.A. Jabarin, Effect of temperature profiles through preform thickness on the properties of reheat-blown PET containers, *Adv. Polymer Technol.* 17 (3) (1997) 237–249]. The definition of shape factor is recalled in Eq. (36) and Fig. 2. An equivalent form based on the contour principle [R. Rammohan, Efficient evaluation of diffuse view factors for radiation, *Int. J. Heat Mass Transfer* 39 (1996) 1281–1286] is given by Eq. (37), while the semi-analytical formula [F. Erchiqui, N.G. Dituba, Analyse comparative des méthodes de calcul des facteurs de formes pour des surfaces à contours rectilignes, *Internat. J. Thermal Sci.* 46 (2007) 284–293] is expressed by Eq. (39). Validation of this semi-analytical approach is obtained by comparison with the analytical solution [H.C. Hottel, Radiant heat transmission between surfaces separated by non-absorbing media, *Trans. ASME* 53 (1931) 265–273, FSP-53-196; A. Feingold, Radiant-interchange configuration factors between various selected plane surfaces, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 292 (1996) 51–60; J.R. Ehlert, T.F. Smith, View factors for perpendicular and parallel rectangular plates, *J. Thermophys. Heat Transf.* 7 (1993) 173–174] as well as with results yielded by three different techniques, i.e. the area-integration method, the Gauss quadratic technique and the contour method. Table 1 summarizes the numerical results obtained in each case and gives the relative error.

Analytical validation of the reheating

Regarding the numerical validation, we have considered a PET semi infinite medium subjected to a uniform incident radiative flux density. The boundaries of the semi transparent medium are taken as adiabatic. Thermophysical properties and geometries are given in Table 2. The one-dimensional Laplace equation which governs the radiation heat transfer is solved analytically with the aid of Laplace transforms. The temperature evolution within the depth of the semi transparent medium is obtained by analytical solution [A.B. De Vriendt, in: G. Morin, (Ed.), *La transmission de la chaleur*, vol. 1, Chicoutimi, Québec, 1984], Eq. (40). Fig. 3 shows a comparison between the numerical solution obtained by the 3D finite elements method and the analytical one. It is seen that, for the three cases, the relative error between numerical and analytical results stays lower than 0.1%.

Numerical modeling of infrared heating

An amorphous PET sheet is considered. The face of the membrane is a square of side 20 cm with a thickness of 1.5 mm. The lateral walls are assumed adiabatic. For modeling with the 3D finite elements method, the sheet is meshed with identical hexahedra comprising eight nodes. The thermophysical properties used for this study are given in [S. Monteix, F. Schmidt, Y. Le Maoult, R. Ben Yedder, R.W. Diraddo, D. Laroche, Experimental study and numerical simulation of preform or sheet exposed to infrared radiative heating, *Journal of Materials Processing Technology* 119 (2001) 90–97] and the reheating time is 35 seconds. The heat transfer coefficient h on front and rear faces is $10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$.

Heat flux received by the polymer during heating

To estimate the incident heat flux distribution on the surface of the polymer, we first calculate the shape factors between each pair of emitting/receiving surfaces. Then the flux distribution is obtained with Eq. (25). Fig. 4 illustrates this distribution.

Validation against experimental results

Figs. 5 and 6 compare the numerical results obtained by the simulation (via MEF 3D) with those obtained experimentally. Fig. 5 displays the temperature distribution on the front and rear surfaces.

Results

Figs. 7–10 illustrate the numerical results obtained for the temporal temperature evolution, during the first five seconds of heating, of the upper receiving face (surface directly exposed to the infrared source), the central plane and the lower face of the PET membrane, respectively.

Figs. 11 and 12 give the temperature evolution at four positions on upper and lower faces of the membrane: 0 cm (edge), 2.5 cm, 5 cm and 10 cm (middle). It is observed that the trend is nearly linear during the period of infrared heating.

On Figs. 13 and 14 is displayed the temperature evolution in the center of the membrane along its thickness during periods 0–4 and 5–35 seconds. © 2008 Publié par Elsevier Masson SAS.

Keywords: Finite element; Radiation; Semi-transparent; Beer–Lambert; PET

1. Introduction

Dans les procédés de thermoformage et d'injection-étirage-soufflage des thermoplastiques, la mise en forme est caractérisée par une étape de chauffage au dessus de la température de transition vitreuse. Cette étape de mise en température jusqu'à l'état souhaité s'effectue par chauffage dans un four à rayonnement infrarouge. Disposé dans un moule de géométrie donnée, le matériau sera mise en forme afin d'élaborer la pièce désirée. Toutefois, la répartition de la température dans la préforme a une grande influence sur la qualité de l'objet formé.

Parmi les matériaux thermoplastiques semi-transparents, le polyéthylène téréphthalate (PET) est le plus utilisé en industrie. C'est un polyester dur et tenace obtenu par polycondensation à partir des produits de base : acide téréphthalique et éthylène glycol. Sa structure peut être amorphe ou partiellement cristalline. La possibilité de passer d'un état à l'autre dépend fortement de la température : en dessous de la température de transition vitreuse ($T_g \approx 80^\circ\text{C}$), les chaînes ne sont pas assez mobiles et le matériau est rigide, avec une microstructure figée. Au dessus de la température de fusion (environ 270°C), les liaisons entre les chaînes sont détruites, le matériau est liquide. Entre ces deux températures, les chaînes sont mobiles et leur conformation peut changer. C'est ce dernier état du PET qui est intéressant pour plusieurs procédés (thermoformage, soufflage, etc.) car il permet la mise en forme avec moins d'efforts. Pour le thermoformage ou l'extrusion-soufflage, il est nécessaire d'atteindre rapidement sur toute l'épaisseur de la préforme thermoplastique une température aux environs de 100°C . Pour cela, le chauffage infrarouge court est préférentiellement utilisé dans ces industries. Pour des épaisseurs relativement minces des préformes en PET, entre 0.5 et 1.5 mm, les spectres de transmittivité de ces polymères représentent 90% à 95% du rayonnement émis par les sources infrarouges [1]. Ces sources opèrent généralement à des températures qui peuvent dépasser les 2200 K.

Du point de vue modélisation numérique, les travaux concernés par le chauffage infrarouge des feuilles thermoplastiques en PET sont beaucoup moins abordés que ceux des matériaux classiques [2]. A titre d'exemples, citons les travaux [3], dans le cas de la méthode des volumes finis 3D ; [4] dans le cas de la méthode de différences finies 1D ; [5,6] dans le cas de la méthode des éléments finis 1D. Pour le calcul des facteurs de forme, nécessaire pour déterminer les flux reçus par les surfaces réceptrices lors du chauffage (conditions aux limites), le traitement analytique n'est possible que pour des géométries simples [7,8]. L'introduction des méthodes numériques [9,10] et proba-

bilistes [11] ont permis de surmonter ces difficultés pour des géométries arbitraires de surfaces. Contrairement à la méthode de Monte-Carlo [8], lorsque deux surfaces ont des régions communes, ou très voisines, le calcul du facteur de forme par des formules d'intégrations numériques diverge, même si l'on utilise un très grand nombre de points de Gauss.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la modélisation 3D par la MEF du chauffage des feuilles minces en PET. Pour cela, nous supposons que les propriétés thermo-physiques du PET sont indépendantes de la température et que l'absorption de l'intensité radiative à l'intérieur du matériau est unidirectionnel et est régit par la loi de Beer–Lambert. Pour contourner le problème épique de calcul du facteur de forme, nous avons utilisé l'approche semi-analytique présentée dans [12].

Un code 3D par MEF a été développé pour étudier le chauffage transitoire des feuilles en PET. Des validations analytiques et expérimentales de transfert radiatif ont été effectuées : en fait du point de vue expérimentale seul les effets des transferts de chaleur couplés sont mesurables.

2. Formulation théorique

La première étape du procédé de thermoformage, qui consiste au chauffage par rayonnement infrarouge d'une feuille polymérique, est caractérisée par la transformation de l'état vitreux de la feuille à un état caoutchouteux. La température à laquelle cette transition se produit est appelée température de transition vitreuse ' T_g ' et l'intervalle de température pour lequel le polymère est suffisamment mou pour être thermoformé s'appelle '*fenêtre de thermoformage*'. En conséquence, si on dépasse la borne supérieure de cet intervalle, la feuille risque de couler sous l'effet des forces de gravité. Dans le cas contraire, le matériau conserve une rigidité et sa mise en forme devient difficile. Dans ces conditions, la simulation numérique est une alternative pour optimiser et simuler cette étape de chauffage infrarouge de préformes thermoplastiques. Toutefois, la simulation numérique nécessite une modélisation robuste du flux de chaleur rayonné par la source émettrice, reçu et absorbé par la feuille thermoplastique. Dans ce travail, nous nous intéressons uniquement à cette étape de chauffage d'une membrane mince en PET et amorphe.

2.1. Mise en équations

Considérons un milieu matériel semi transparent et amorphe, occupant un volume V de surface S . En vertu de la première loi

Nomenclature

<i>r</i>	vecteur position	m
<i>z</i> , <i>z</i> ₀	positions	m
<i>r</i>	distance entre les vecteurs <i>r</i> _{<i>i</i>} et <i>r</i> _{<i>j</i>}	m
<i>n</i>	vecteur normal	
<i>V</i>	volume	<i>m</i> ³
<i>S</i>	surface	<i>m</i> ²
<i>t</i>	temps	s
<i>L</i>	épaisseur caractéristique	m
<i>C</i>	chaleur spécifique	J Kg ⁻¹ K ⁻¹
<i>k</i>	tenseur de conductivité thermique ...	W m ⁻¹ K ⁻¹
<i>k</i>	conductivité thermique	W m ⁻¹ K ⁻¹
<i>h</i>	coefficient d'échange convectif	W m ⁻² K ⁻¹
<i>T</i>	température du milieu	K
<i>T</i>	vecteur nodal des températures à l'instant <i>t</i>	K
<i>T</i> ^{<i>n</i>}	vecteur nodal des températures à l'instant <i>t</i> _{<i>n</i>} ...	K
<i>T</i> _{<i>s</i>}	température de la source	K
<i>T</i> _{<i>g</i>}	température de transition vitreuse	K
<i>T</i> _∞	température du milieu ambiant	K
<i>q</i> _{rad,λ}	flux radiatif spectral	W m ⁻³
<i>q</i> _{0,λ}	éclairement spectral	W m ⁻³
<i>q</i> _{rad}	flux radiatif	W m ⁻²
<i>q</i> ₀	éclairement	W m ⁻²
<i>S</i> _{rad}	divergence du flux radiatif	W m ⁻³
<i>C</i>	matrice de capacité thermique	
<i>K</i>	matrice de conductance thermique	
<i>Q</i>	vecteur de charge thermique	
<i>Ĉ</i>	matrice modifiée de capacité thermique	
<i>^K</i>	matrice modifiée de conductance thermique	
<i>Q̂</i>	vecteur modifiée de charge thermique	

A_j	surface j	m^2
∂A_j	contour de la surface A_j	m
F_{ij}	facteur de forme entre les surfaces i et j	
f_k	fraction de rayonnement absorbé par bande k	
$I_{b,\lambda}$	intensité spectrale du corps noir	$\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$
I_λ	intensité spectrale	$\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$
$E_{b,\lambda}$	émittance spectrale du corps noir	$\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$
E_b	émittance du corps noir	W m^{-2}
<i>Symboles grecs</i>		
ρ	masse volumique	Kg m^{-3}
Φ_λ	fonction de phase spectrale	
Ω	direction de propagation	
\mathcal{Q}	angle solide	sr
μ	cosinus de l'angle polaire	
λ	longueur d'onde	m
ω_λ	albédo spectral	
κ_λ	coefficient d'absorption spectrale	m^{-1}
$\bar{\kappa}$	coefficient moyen d'absorption	m^{-1}
β_λ	coefficient d'extinction spectrale	m^{-1}
$\sigma_{d,\lambda}$	coefficient de diffusion spectrale	m^{-1}
ρ_λ	réflexivité spectrale	
$\bar{\rho}$	réflectivité moyenne	
τ_λ	transmissivité spectrale	
$\bar{\tau}$	transmissivité moyenne	
ε_λ	émissivité spectrale	
$\bar{\varepsilon}$	émissivité moyenne	
α_λ	absorptivité spectrale	
σ	constante de Stéphan–Boltzmann	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$

de la thermodynamique, l'équation de conservation de l'énergie en absence de convection est donnée par l'équation suivante [13] :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla T) = S_{\text{rad}} \quad (1a)$$

S_{rad} représente le terme source radiatif donné par la relation suivante :

$$S_{\text{rad}} = -\nabla \cdot \mathbf{q}_{\text{rad}} \quad (1b)$$

q_{rad} représente la densité du flux radiatif. C , ρ et \mathbf{k} représentent, respectivement, la chaleur spécifique, la densité et le tenseur de conductivité thermique du matériau polymérique. Pour un thermoplastique isotrope, nous avons $\mathbf{k} = k\delta_{ij}$. La condition de frontière considérée dans ce travail, dans le cas d'un milieu isotrope, est donnée par :

$$k\nabla T \cdot \mathbf{n} + h(T - T_\infty) - \mathbf{q}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2)$$

q_{rad} est le flux de chaleur reçu par la surface de la membrane polymérique, h est son coefficient d'échange de chaleur par convection et T_∞ est la température du milieu ambiant (air). Le terme $h(T - T_\infty)$ représente le transfert de chaleur par convection à partir du milieu polymérique vers le milieu ambiant. Le flux de chaleur incident dépend de la configuration de la source

(position des éléments chauffants, températures et émissivités de ces éléments) et de la membrane semi transparente (position, température, etc.).

2.2. Formulation par éléments finis

2.2.1. Approximation spatiale

La méthode des éléments finis de type Galerkin est largement répandue pour la modélisation du transfert de chaleur. Indépendamment de la dimensionnalité spatiale du problème de la chaleur, la méthode des éléments finis mène aux équations de premier ordre, du rang égales au nombre total des noeuds formant le maillage géométrique de la membrane :

$$\mathbf{C} \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{Q} \quad (3)$$

où C , K et Q sont respectivement les matrices globales de capacité thermique, de conductance thermique et de charge thermique. T est le vecteur nodal global des températures.

Pour améliorer la stabilité numérique de (3), la matrice de capacité thermique C peut être diagonalisée ‘*lumped Matrix*’ [14]. Bien que cette matrice présente une diffusion numérique, elle élimine les oscillations indésirables produites par la matrice masse consistante ‘*unlumped Matrix*’.

Dans ce travail, les propriétés thermophysiques du milieu semi transparent sont supposées constantes.

2.2.2. Schéma implicite d'intégration du temps

Dans ce travail, le schéma monopas implicite d'intégration en temps est utilisé [14]. Dans ce cas, l'équation (3) de transfert de chaleur devient :

$$\hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{T}^{n+1} = \hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{T}^n + \hat{\mathbf{Q}} \quad (4)$$

où $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{K}}$ et $\hat{\mathbf{Q}}$ sont respectivement les matrices globales modifiées de capacité thermique, de conductance thermique et de charge thermique du système [14]. \mathbf{T}^n est le vecteur nodal global des températures à l'instant t_n . La matrice $\hat{\mathbf{C}}$ est constante pour les problèmes linéaires tant que le pas de temps ne change pas. Son inverse n'est évalué qu'une seule fois. Pour la stabilité de la méthode, nous considérons le schéma de Crank–Nicolson [14].

2.3. Expression de la divergence du flux radiatif

La divergence du flux rayonné à l'intérieur du milieu semi transparent, S_{rad} , dans la direction Ω de la propagation de l'intensité spectrale à la position \mathbf{r} , est reliée au flux rayonné \mathbf{q}_{rad} par :

$$S_{\text{rad}}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{q}_{\text{rad}}(\mathbf{r}) \quad (5)$$

En supposant que le milieu est homogène, nous avons pour le flux rayonné l'expression suivante [11] :

$$\mathbf{q}_{\text{rad}}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \int_{4\pi} I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega) \Omega \, d\Omega \, d\lambda \quad (6)$$

La divergence spectrale de ce flux rayonné est obtenue en effectuant un bilan net d'énergie radiative au sein d'un petit volume élémentaire du milieu semi transparent homogène et de coefficient d'absorption spectral κ_λ :

$$\begin{aligned} S_{\text{rad}} &= -\nabla \cdot \mathbf{q}_{\text{rad}}(\mathbf{r}) \\ &= -\int_0^\infty \left[4\pi \kappa_\lambda I_{b,\lambda} - \kappa_\lambda \int_{4\pi} I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega) \, d\Omega \right] d\lambda \end{aligned} \quad (7)$$

$I_{b,\lambda}$ étant l'intensité spectrale du corps noir. La connaissance du flux rayonné \mathbf{q}_{rad} nécessite le calcul de l'intensité spectrale I_λ via la résolution de l'équation intégrale du transfert radiatif [11] :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_\lambda} \nabla \cdot [I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega) \Omega] + I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega) \\ = (1 - \omega_\lambda) I_{b,\lambda}(\mathbf{r}) + \frac{\omega_\lambda}{4\pi} \int_{4\pi} \Phi_\lambda(\Omega, \Omega') I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega') \, d\Omega' \end{aligned} \quad (8)$$

où Φ_λ représente la fonction de phase spectrale, β_λ le coefficient d'extinction spectrale et ω_λ l'albédo spectrale. Le coefficient d'extinction spectrale est défini comme l'atténuation du rayonnement par diffusion, caractérisé par le coefficient spectral $\sigma_{d,\lambda}$, et par absorption, caractérisé par le coefficient spectral κ_λ , soit :

$$\beta_\lambda = \kappa_\lambda + \sigma_{d,\lambda} \quad (9)$$

Toutefois, il faut souligner que l'albédo de diffusion ω_λ est relié aux coefficients $\sigma_{d,\lambda}$ et κ_λ par la formule suivante :

$$\omega_\lambda = \frac{\sigma_{d,\lambda}}{\kappa_\lambda + \sigma_{d,\lambda}} \quad (10)$$

2.4. Conditions aux limites

Dans le cas d'une frontière diffuse, nous considérons que l'intensité quittant la frontière est isotrope et que la partie réfléchie est fonction de l'intensité incidente totale provenant de toutes les directions du demi-espace orienté selon la normale \mathbf{n} . Pour toutes les directions Ω appartenant à ce demi-espace nous avons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} I_\lambda(p, \Omega) &= \varepsilon_p I_{b,\lambda}(p, T) \\ &+ \frac{1 - \varepsilon_p}{\pi} \int_{\Omega \cdot \mathbf{n} < 0} |\Omega' \cdot \mathbf{n}| I_\lambda(p, \Omega') \, d\Omega' \end{aligned} \quad (11)$$

ε_p représente l'émissivité au point p de la frontière S .

2.5. Modèle réduit de L'équation du transfert radiatif (ETR)

Dans le cas d'un PET amorphe, plusieurs travaux confirment que ce matériau peut être considéré comme milieu non diffusant [1,15,16]. Dans ces conditions, les coefficients d'extinction β_λ et d'absorption κ_λ deviennent égaux et l'albédo résultant devient nul. Avec ces considérations, l'ETR, donnée par (8), s'écrit :

$$\frac{1}{\kappa_\lambda} \nabla \cdot [I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega) \Omega] + I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega) = I_{b,\lambda}(\mathbf{r}) \quad (12)$$

Dans la plage des températures considérées dans les procédés de thermoformage et de soufflage de préformes en PET, qui est généralement comprises entre 295 et 415 K, la bande spectrale d'émission de ces matériaux possède une zone de forte absorption [3]. En plus, les températures des sources de rayonnement utilisées pour ces procédés sont largement supérieures aux températures de mise en forme de ces milieux thermoplastiques. Dans ces conditions nous pouvons utiliser l'hypothèse des milieux froids [17]. Cette hypothèse permet alors d'exprimer la transmission de l'intensité spectrale à travers le matériau, supposé homogène non diffusant, en fonction de la position \mathbf{r} et de la direction Ω , soit :

$$\frac{1}{\kappa_\lambda} \nabla \cdot [I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega) \Omega] + I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \quad (13)$$

Et la divergence du flux spectral rayonné dans le milieu semi transparent s'écrit alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_{\text{rad},\lambda}(\mathbf{r}) = -\kappa_\lambda \int_{4\pi} I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega) \, d\Omega \quad (14)$$

Ainsi, dans le cas d'un rayonnement monodimensionnel, en un point z de l'épaisseur de la membrane polymérique et dans une direction θ , l'équation de transfert radiatif possède une solution donnée par [11] :

$$I_\lambda(z) = I_\lambda(z_0) \cos \theta \exp \left[-\frac{\kappa_\lambda z}{\cos \theta} \right] \quad (15)$$

$I_\lambda(z_0)$ représente la condition au limite sur l'intensité spectrale à la position z_0 de la frontière. Le flux spectral est alors donné par :

$$\begin{aligned} q_{\text{rad},\lambda}(z) &= \int_{\Omega} I_\lambda(z_0) \cos \theta \exp \left[-\frac{\kappa_\lambda z}{\cos \theta} \right] d\Omega \\ &= 2\pi q_{0,\lambda}(z_0) \int_0^1 \mu \exp \left[-\frac{\kappa_\lambda z}{\mu} \right] d\mu \end{aligned} \quad (16)$$

$q_{0,\lambda}$ représente l'éclairement spectral de la surface réceptrice de la membrane semi transparente et $\cos \theta = \mu$. Dans ce travail nous considérons uniquement des membranes thermoplastiques en PET minces (épaisseur très petite en comparaison avec les autres dimensions géométriques de la membrane semi transparente). Ainsi, en supposant que la propagation du rayonnement s'effectue dans la même direction que celle de la normale à la surface de la membrane polymérique ($\cos \theta = 1$), l'intensité du rayonnement au point z est alors donnée par la loi de Beer-Lambert, soit :

$$I_\lambda(z) = I_\lambda(z_0) \exp[-\kappa_\lambda z] \quad (17)$$

et l'expression du flux spectral transmis à travers l'épaisseur est alors donnée par la relation suivante :

$$q_{\text{rad},\lambda}(z) = q_{0,\lambda}(z_0) \exp[-\kappa_\lambda z] \quad (18a)$$

Ainsi, sur l'ensemble des longueurs d'ondes, le flux radiatif total est donné par :

$$q_{\text{rad}}(z) = \int_0^{\infty} (q_{0,\lambda}(z_0) \exp[-\kappa_\lambda z]) d\lambda \quad (18b)$$

2.6. Rayonnement infrarouge intercepté par la surface thermoplastique

Pour cela, considérons une feuille semi transparente en PET exposée à une source infrarouge à haute température. L'énergie spectrale émise par la source et dont une partie est reçue par la surface thermoplastique réceptrice est donnée par la relation suivante :

$$E_\lambda(T_s) = \varepsilon_\lambda(T_s) E_{\lambda,b}(T_s) \quad (19)$$

où $\varepsilon_\lambda(T_s)$ représente l'émissivité spectrale de la source chauffante et $E_{\lambda,b}(T_s)$ l'émissance spectrale du corps noir. L'expression de $E_{\lambda,b}(T_s)$ est donnée par la distribution de Planck :

$$E_{\lambda,b}(T_s) = \frac{C_1}{\lambda^5 [\exp(C_2/\lambda T_s) - 1]} \quad (20)$$

T_s est la température absolue de la source de chaleur (K). Les constantes C_1 et C_2 sont données par :

$$C_1 = 3.742 \times 10^8 \text{ W} \mu\text{m}^4/\text{m}^2,$$

$$C_2 = 1.439 \times 10^4 \mu\text{m K}$$

Pour tenir compte des géométries arbitraires de la source et du récepteur, nous subdivisons leurs surfaces en petites surfaces élémentaires simples. Ainsi, en supposant que le milieu

qui sépare la source du milieu thermoplastique est absolument transparent au rayonnement et que la surface de la source est diffuse, la quantité d'énergie spectrale $q_{0,\lambda}$ quittant une surface finie A_i de la source et qui est interceptée par une surface finie A_j de la membrane thermoplastique est donnée par la relation suivante :

$$q_{0,\lambda}(T_s) = F_{ij} \frac{A_i}{A_j} E_\lambda(T_s) \quad (21)$$

F_{ij} est le facteur de forme. Le rayonnement total intercepté par la surface A_j de plastique est alors obtenu en intégrant sur la totalité des longueurs d'ondes, soit :

$$q_0(T_s) = \int_0^{\infty} q_{0,\lambda}(T_s) d\lambda \quad (22)$$

En utilisant la formule (21), nous obtenons pour (22) la relation suivante :

$$q_0(T_s) = F_{ij} \frac{A_i}{A_j} \int_0^{\infty} \varepsilon_\lambda E_{\lambda,b}(T_s) d\lambda \quad (23)$$

Dans le cas d'une source qui rayonne de façon isotrope (source Lambertienne de rayonnement), nous considérons une émissivité moyenne de la source chauffante, soit :

$$\bar{\varepsilon}(T_s) = \frac{\int_{\Delta\lambda} \varepsilon_\lambda(T_s) d\lambda}{\Delta\lambda} \quad (24)$$

Dans ce cas-ci, le rayonnement total intercepté par la surface de plastique, donnée par (30), devient :

$$q_0(T_s) = \sigma F_{ij} \frac{A_i}{A_j} \bar{\varepsilon}(T_s) T_s^4 \quad (25)$$

puisque :

$$\int_0^{\infty} E_{\lambda,b}(T_s) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{C_1}{\lambda^5 [\exp(C_2/\lambda T_s) - 1]} d\lambda = \sigma T_s^4 \quad (26)$$

Le terme σT_s^4 représente l'émissance du corps noir et σ est la constante de Stéphan–Boltzmann ($= 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$).

2.7. Rayonnement infrarouge absorbé par la membrane polymérique

Le mécanisme d'absorption du rayonnement infrarouge par une membrane polymérique semi transparente dépend du régime de vibration des molécules constituant le polymère. Ainsi, pour une température donnée, chaque membrane semi transparente est caractérisée par un spectre d'absorption. Ce spectre d'absorption, en vertu de la loi de conservation de l'énergie, est relié aux spectres de transmission et de réflexion par la relation suivante :

$$\alpha_\lambda = 1 - \tau_\lambda - \rho_\lambda \quad (27)$$

où ρ_λ , α_λ et τ_λ représentent, respectivement, la réflexivité, l'absorptivité et la transmissivité hémisphérique spectrale de la membrane. Dans le cas d'une membrane en PET mince, l'absorption spectrale du rayonnement dans le polymère est fonction du coefficient d'absorption spectrale κ_λ et de la profondeur

z du milieu semi transparent. Ce coefficient d'absorption κ_λ peut être obtenu par la connaissance du spectre de transmissivité du matériau. Si nous supposons que la propagation du rayonnement s'effectue dans la direction normale à la membrane et que la réflexion du PET est négligeable, la loi de Beer–Lambert nous permet d'écrire :

$$\kappa_\lambda(\lambda) = -\frac{\ln[\tau_\lambda(\lambda)]}{L} \quad (28)$$

L étant l'épaisseur de la membrane thermoplastique utilisée pour obtenir le spectre de transmissivité du matériau en fonction de la longueur d'onde. En utilisant la relation (25) et en tenant compte du phénomène de réflexion à la surface de la membrane réceptrice, l'énergie spectrale absorbée est donnée par :

$$q_{\text{rad},\lambda}(z) = q_{0,\lambda}(1 - \rho_\lambda) \exp[-\kappa_\lambda z] \quad (29)$$

$q_{0,\lambda}(1 - \bar{\rho}_k)$ est l'énergie de rayonnement monochromatique qui est interceptée par la surface du polymère et, par la suite, absorbée par ce milieu plastique. En pratique, l'énergie radiative absorbée par le milieu polymérique est obtenue en faisant la somme de toutes les énergies associées aux bandes k de longueurs d'ondes constituant le spectre, soit :

$$q_{\text{rad}}(z) = \sum_k f_k q_{0,k}(1 - \bar{\rho}_k) \exp[-\bar{\kappa}_k z] \quad (30)$$

où f_k est la fraction de rayonnement absorbé par bande k de longueurs d'ondes. $\bar{\rho}$ est la réflectivité moyenne dans la bande k déterminée par :

$$\bar{\rho} = \frac{\int_{\Delta\lambda} \rho_\lambda(\lambda) E_{\lambda,b}(T_s) d\lambda}{\sigma T_s^4} \quad (31)$$

et $\bar{\kappa}$ est le coefficient moyen d'absorption dans la bande k . Dans ce cas-ci, $\bar{\kappa}$ est évalué à partir de la relation (28) et en utilisant la formule suivante :

$$\bar{\tau} = \frac{\int_{\Delta\lambda} \tau_\lambda(\lambda) E_{\lambda,b}(T_s) d\lambda}{\sigma T_s^4} \quad (32)$$

dans laquelle $\bar{\tau}$ est le coefficient moyen de transmissivité dans la bande k .

L'énergie totale absorbée par volume, divergence de flux, est alors obtenue par la formule suivante :

$$S_{\text{rad}}(z) = \sum_k f_k q_{0,k}(1 - \bar{\rho}_k) \bar{\kappa}_k \exp[-\bar{\kappa}_k z] \quad (33)$$

Dans le cas où les valeurs spectrales sont représentées par des valeurs moyennes dans le spectre entier, la relation (33) par utilisation de l'expression (25) devient :

$$S_{\text{rad}}(z) = F_{ij} \left(\frac{A_j}{A_i} \right) \bar{\varepsilon}(T_s) \sigma T_s^4 \sum_k f_k (1 - \bar{\rho}_k) \bar{\kappa}_k \exp[-\bar{\kappa}_k z] \quad (34)$$

Généralement, le facteur de réflexion représente les pertes pour le polymère (habituellement inférieur à 5%) et il sera négligé dans ce travail. Dans ce cas, la relation (34) devient :

$$S_{\text{rad}}(z) = F_{ij} \left(\frac{A_j}{A_i} \right) \bar{\varepsilon}(T_s) \sigma T_s^4 \sum_k f_k \bar{\kappa}_k \exp[-\bar{\kappa}_k z] \quad (35)$$

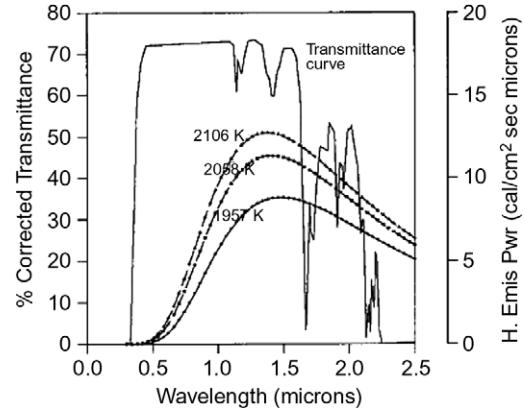


Fig. 1. Spectre de transmissivité du PET [16].

Soulignons que pour les membranes en PET à faible épaisseur (entre 0.5 et 1.5 mm), les spectres de transmissivité limités à l'infrarouge court représentent 90 à 95% du rayonnement émis par des sources infrarouges à des températures aux environs 2300 K et pour lesquelles la longueur d'onde est, généralement, comprise dans l'intervalle $\Delta\lambda = [0.2–10]$ μm. La Figure 1 illustre la courbe de transmissivité du PET dans l'intervalle $\Delta\lambda = [0.25–2.5]$ μm [16].

3. Surfaces de radiations mutuelles

La prédiction des énergies échangées par rayonnement, entre chaque partie de la membrane thermoplastique (récepteur) et chaque partie de l'émetteur (source infrarouge), dépend, d'une part, des propriétés physiques de chaque partie du système émetteur-récepteur et du milieu environnant d'autre part. Dans le cas d'un milieu ambiant transparent, le problème de calcul de l'échange de chaleur radiatif entre des surfaces A_i de l'émetteur infrarouge et A_j du récepteur placées arbitrairement dans l'espace, se ramène à la recherche de la valeur de la surface de radiation mutuelle F_{ij} [18], appelée facteur de forme.

Le calcul analytique des facteurs de forme n'est possible que pour des géométries simples. L'introduction des méthodes d'intégrations numériques [9,10] et probabilistes [11] ont permis de surmonter ces difficultés, pour des formes arbitraires des émetteurs et récepteurs. Dans le cas d'intégration numérique, les formulations utilisées peuvent être classées en deux catégories : (i) formulation intégrale surfacique et (ii) formulation intégrale de contour. Le calcul numérique de ces intégrales peut s'effectuer, par exemple, par l'utilisation de la formule de quadrature de Gauss sur des éléments finis de surface ou de contour [19]. Contrairement à la méthode de Monté-Carlo [11], lorsque deux surfaces ont des régions communes, ou très voisines, le noyau qui apparaît dans l'expression mathématique de la valeur de la surface radiative mutuelle diverge dans ces régions. L'utilisation des formules classiques d'intégrations numériques pour le calcul de F_{ij} conduit à des résultats trop peu précis, même si nous utilisons un très grand nombre de points de Gauss [20]. Toutefois, la méthode de Monté Carlo permet de contourner ce problème au détriment d'un temps de calcul élevé. Afin de tenir compte des formes quelconques des sources et des préformes,

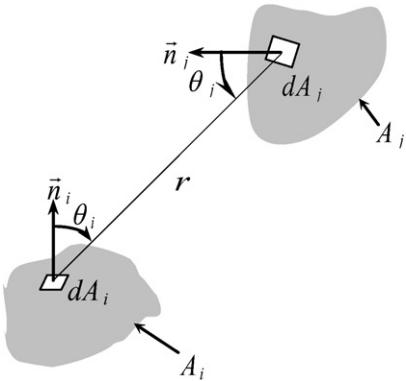


Fig. 2. Définition de la surface radiative mutuelle.

dans ce présent travail, nous avons utilisé une méthode semi-analytique pour calculer le facteur de forme [12].

3.1. L'approche semi-analytique

La fraction de l'énergie quittant la surface A_i qui est interceptée par la surface A_j (facteur de forme) est définie par :

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi r^2} dA_i dA_j \quad (36)$$

où r est la distance entre les éléments de surface dA_i et dA_j (voir Figure 2).

Les intégrales de surface qui interviennent dans (36) peuvent être remplacées par des intégrales de contour, en utilisant le théorème de Stockes [10] :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \oint_{\partial A_i} \oint_{\partial A_j} \ln r dr_i dr_j \quad (37)$$

r qui apparaît dans (37) représente cette fois-ci la distance entre les vecteurs positions r_i , d'un point quelconque p appartenant au contour ∂A_i de la surface A_i , et r_j , d'un point quelconque q appartenant au contour ∂A_j de la surface A_j .

r qui apparaît dans (37) représente cette fois-ci la distance entre les vecteurs positions r_i , d'un point quelconque p appartenant au contour ∂A_i de la surface A_i , et r_j , d'un point quelconque q appartenant au contour ∂A_j de la surface A_j :

$$r = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (38)$$

Dans ce travail, pour évaluer la valeur de la surface radiative mutuelle F_{ij} avec précision, nous avons considéré l'approche semi-analytique fournie dans [12]. Cette approche, en premier temps, consiste à lever la singularité en intégrant analytiquement la partie singulière de (37) et la seconde consiste à intégrer numériquement le résultat de cette première étape. La nouvelle expression de F_{ij} est alors donnée par la formule suivante :

$$F_{ij} = \frac{1}{2\pi A_i} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) (\Gamma_{ij}^a + \Gamma_{ij}^b + \Gamma_{ij}^c) \quad (39)$$

\mathbf{e}_i et \mathbf{e}_j sont des vecteurs unitaires appartenant respectivement aux segments de contour L_i et L_j formant les frontières

∂A_i et ∂A_j . Γ_{ij}^a , Γ_{ij}^b , Γ_{ij}^c sont des fonctions dont les expressions font apparaître les propriétés géométriques des segments contours [12].

Pour la validation, nous avons confronté la solution obtenue par cette approche, d'une part, avec la solution analytique [21–23] et avec les résultats obtenus avec trois différentes techniques d'autre part, soit : 'Aera-Integration method' pour trois types de maillage fournis dans [12], quadratique de Gauss et la méthode classique de contour. Le Tableau 1 résume les résultats numériques obtenus dans chacun des cas et donne l'erreur relative.

Ces exemples montrent clairement que la méthode semi-analytique de frontière, pour le calcul de la valeur de facteur de forme, est robuste et pourra être, sans difficulté, combinée à d'autres techniques numériques (méthode des éléments finis ou de frontières) pour analyser des problèmes physiques de transfert de chaleur dans les systèmes physiques.

3.2. Validation analytique de la réchauffe

Pour ce qui est de la validation numérique, nous avons considérés un milieu semi infini en PET soumis à une densité de flux radiatif incident uniforme \mathbf{q}_0 . Les frontières du milieu semi transparent sont considérées adiabatique. Les propriétés thermophysiques et géométriques sont fournies dans le Tableau 2. L'équation de Laplace monodimensionnelle qui caractérise ce transfert radiatif de chaleur est résolue analytiquement à l'aide des transformées de Laplace. L'évolution de la température $T(z, t)$ à travers la profondeur z du milieu semi transparent est donnée par la solution analytique suivante [24] :

$$T(z, t) = T_0 - \frac{q_0}{k\kappa} \exp(-\kappa z) + 2 \frac{q_0}{k} \sqrt{\alpha t} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + \frac{q_0}{2k\kappa} \exp(\kappa^2 \alpha t + \kappa z) \operatorname{erfc}\left(\kappa \sqrt{\alpha t} + \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + \frac{q_0}{2k\kappa} \exp(\kappa^2 \alpha t - \kappa z) \operatorname{erfc}\left(\kappa \sqrt{\alpha t} - \frac{z}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (40)$$

La Figure 3 illustre une comparaison entre la solution numérique, obtenue par la méthode des éléments finis 3D, et analytique, équation (40). Dans les trois cas, nous remarquons que l'erreur relative entre les résultats numériques et analytiques est inférieure à 0.1%.

3.3. Modélisation numérique du chauffage infrarouge

Pour la modélisation numérique, nous avons considéré une feuille polymérique en PET amorphe. La géométrie de la membrane est un carré de 20.0 cm de côté et de 1.5 mm d'épaisseur. Ses faces latérales sont considérées adiabatique. Pour la modélisation numérique par la méthode des éléments finis 3D, la feuille est maillée à l'aide des éléments hexaédriques identiques à huit noeuds ($41 \times 41 \times 10$ noeuds formant la feuille). Les paramètres thermophysiques utilisés dans cette étude sont donnés dans [3] et le temps de réchauffe est de 35 secondes, avec un coefficient d'échange h sur les faces avant et arrière de $10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$.

Tableau 1

Validation du calcul de facteur de forme dans le cas de surfaces triangulaires parallèles

Aera-Integration	Maillage	Results	Erreur %
Quadratic Gauss	Maillage T1	0.159155	38.34
	Maillage T2	0.134023	16.50
	Maillage T3	0.123739	7.56
Contour-integral	Nbr Pts Gauss		
	1	0.159155	38.34
	3	0.114041	0.87
	4	0.113515	1.33
	7	0.115134	0.08
	12	0.115051	0.01
Semi-Analytical	Nbr Pts Gauss		
	1	0.142058	16.50
	2	0.114598	0.04
	3	0.115111	0.04
	4	0.115048	-
	5	0.115049	-
Exact Value		0.115045	0.211324

Tableau 2

Propriétés thermophysiques et conditions initiales du PET

Densité, ρ (Kg/m ³)	1400
Conductivité thermique, k (W/m/°C)	0.29
Chaleur spécifique, C_p (J/Kg/°C)	1750
Coefficient d'absorption, κ (m ⁻¹) pour λ compris dans l'intervalle [0.2–10] µm	2660
Épaisseur, h_0 (mm)	10
Flux, q_0 (W/m ²)	10000
Température initiale, T (°C)	25
Temps de chauffage, t (sec.)	35

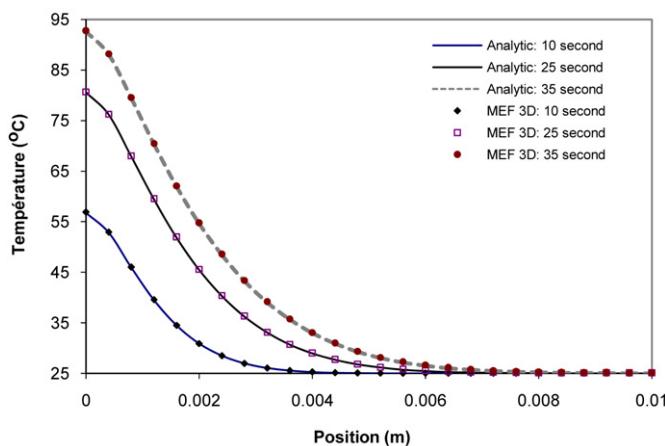


Fig. 3. Comparaison Solution Analytique/MEF, épaisseur de 10 mm.

L'émetteur infrarouge considéré dans ce travail est celui fourni dans [3]. Il s'agit d'une lampe L400 dont le réflecteur est constitué d'un dépôt de céramique sur la surface arrière d'un tube en quartz. En régime permanent, le filament de tungstène constituant la lampe atteint la température de 1700 K. Le diamètre de l'hélice du filament est égal à 4 mm et sa longueur est

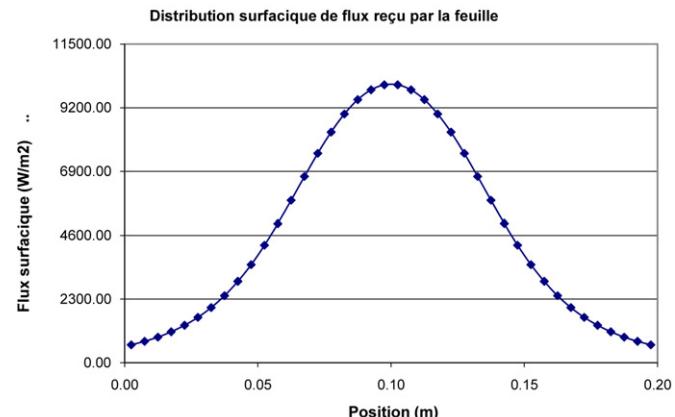


Fig. 4. Distribution de flux surfacique sur la trace de la face avant de la feuille PET.

de 64 mm. Un seul émetteur est utilisé à une distance de 5 cm du centre de la membrane thermoplastique. Pour la modélisation nous avons considéré la surface équivalente du filament, soit $S_{\text{fil}} = \pi dL$. Pour plus de détail sur le dispositif de mesure de température nous recommandons aux lecteurs de consulter la référence [3].

3.4. Flux de chaleur reçu par la surface réceptrice du polymère lors du chauffage

Pour déterminer la distribution induite du flux à la surface réceptrice de la membrane polymérique, nous avons dans un premier temps calculé les facteurs de formes entre chaque paire de surface émetteur-récepteur et ensuite, via l'équation (25), calculé la distribution de flux. La Figure 4 illustre la distribution de flux sur la trace de la surface réceptrice de la membrane. Nous constatons, dans les résultats numériques, que la distri-

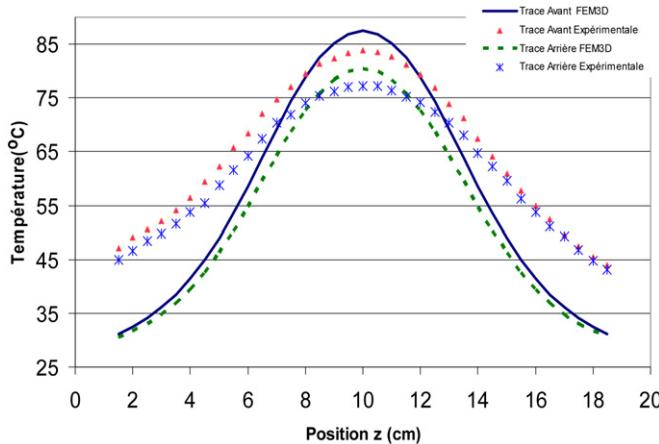


Fig. 5. Distribution de la température sur les traces de la face avant et arrière de la feuille PET.

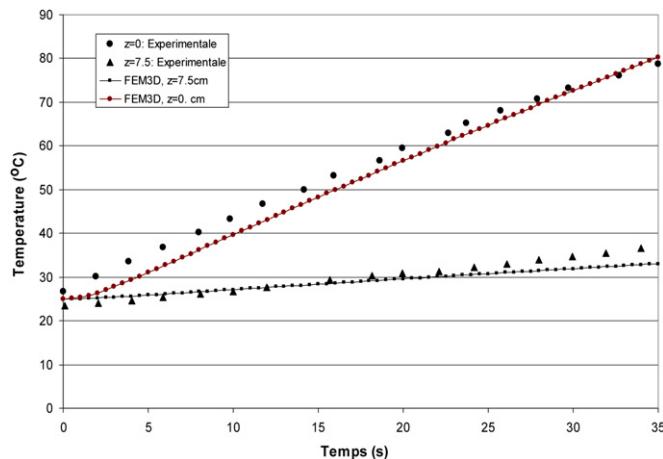


Fig. 6. Évolution de la température en deux positions de la face avant de la membrane.

bution de ce flux n'est pas uniforme et possède une symétrie. Ces résultats sont cohérents aux considérations déjà établies ; puisque l'émetteur est situé à une distance centrale par rapport à la surface de la membrane et sa température est supposée uniforme. Soulignons que le flux maximal (10022 W/m^2) se situe au centre de la membrane et les minimums (647 W/m^2) à ses bords.

3.5. Validation avec des résultats expérimentaux

Les Figures 5–6 illustrent les résultats numériques obtenus par la simulation, via MEF3D, avec ceux obtenus expérimentalement. La Figure 5 concerne la distribution de la température sur les traces avant et arrière des surfaces de la feuille en PET. Soulignons une légère asymétrie, dans les résultats expérimentaux, aux bords de la membrane, ceci peut s'expliquer par l'effet des forces de gravité qui tendent, sous l'effet de la chaleur, à faire couler la matière du plastique vers le bas. La prise en compte des variations des propriétés thermophysiques avec la température et le couplage des équations de la chaleur avec les équations de mouvement devrait, en principe, expliquer cette asymétrie. Toutefois, l'écart relatif entre les résultats

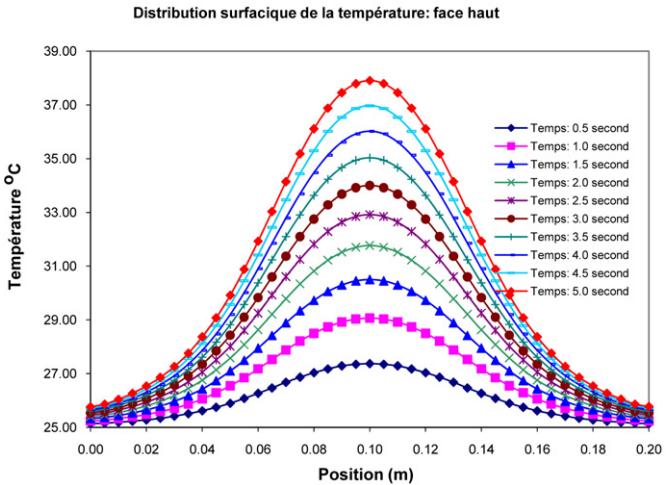


Fig. 7. Évolution de la distribution de la température sur la trace avant de la membrane.

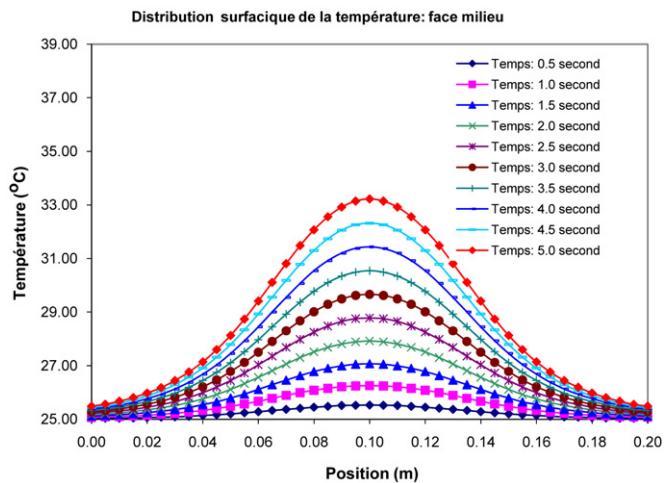


Fig. 8. Évolution de la distribution de la température sur la trace centrale de la membrane.

numériques et expérimentaux est très important. Cet écart relatif atteint 5% au centre et jusqu'à 35% aux bords de la feuille PET. La Figure 6 concerne l'évolution de la température sur la face avant de la feuille (face exposée à la source) en deux points. Finalement, en tenant compte des hypothèses effectuées pour la simulation numérique, nous pouvons considérer dans l'ensemble que ces résultats sont satisfaisants.

3.6. Résultats et discussion

Les Figures 7–9 illustrent respectivement les résultats numériques de l'évolution temporelle de la température, pendant les cinq premières secondes de chauffage, sur les traces de la face réceptrice supérieure (surface exposée directement à la source infrarouge), la face centrale et la face inférieure de la membrane en PET. À l'instant $t = 5.0$ seconde, la température sur la face irradiée atteint 37.9°C , au centre de la feuille correspondant au centre de la source infrarouge. Sur la face centrale et la face en bas, au centre de la feuille, les températures atteignent, respectivement, 33.2 et 31.0°C . Ce ralentissement dans le chauffage de

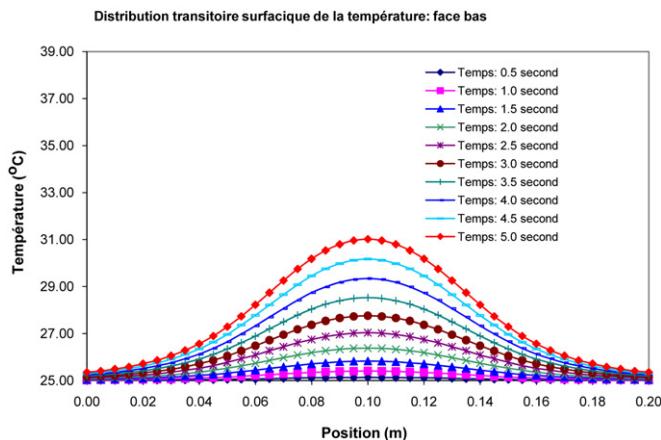


Fig. 9. Évolution de la distribution de la température sur la trace arrière de la membrane.

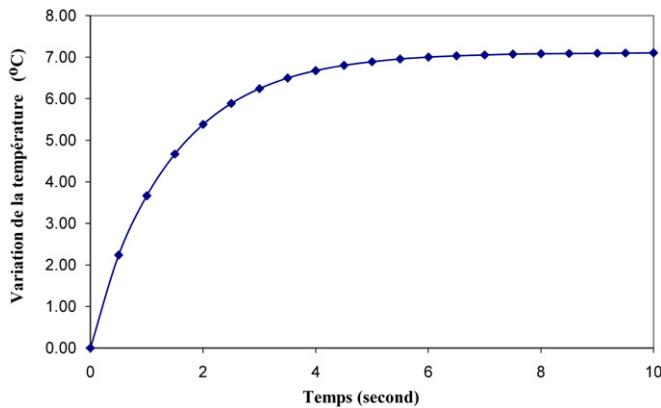


Fig. 10. Évolution de la différence de température en position centrale entre les faces avant et arrière de la membrane en PET.

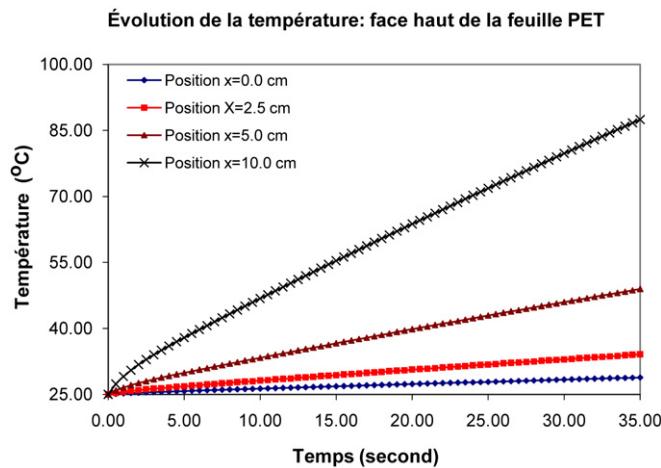


Fig. 11. Distribution de la température, face haut pour quatre positions.

la feuille s'explique par le mauvais comportement en conduction thermique du PET. Nous constatons, au centre de la membrane et après 4 secondes de chauffage, l'établissement d'une différence de température de 7 °C. Cette valeur reste constante, après les premières 5 secondes de chauffage comme illustré sur la Figure 10.

Les Figures 11–12 illustrent l'évolution de la température en quatre positions sur les faces supérieure et inférieure de la

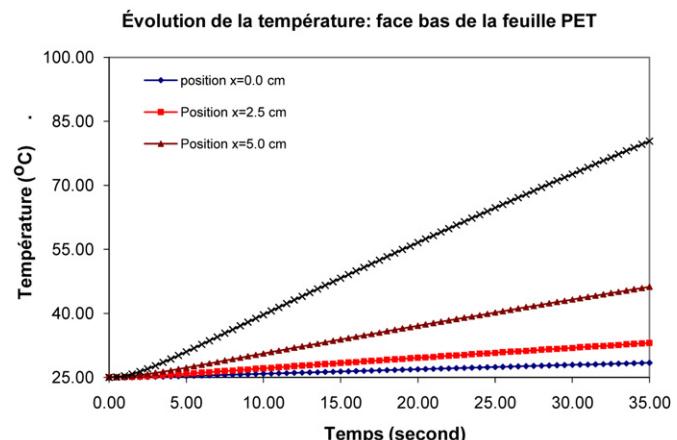


Fig. 12. Distribution de la température, face bas pour quatre positions.

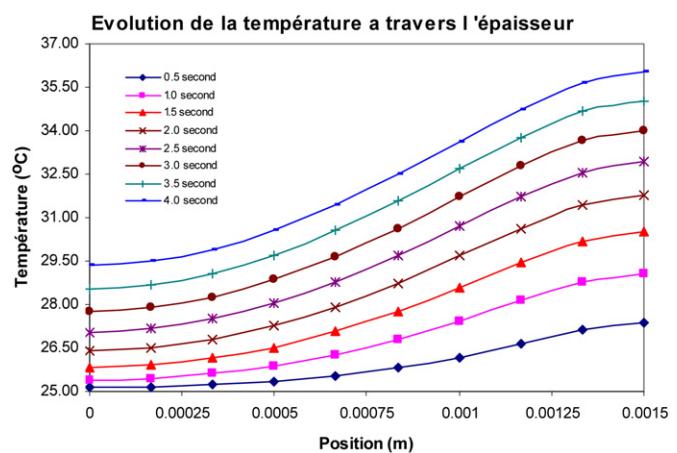


Fig. 13. Distribution de la température à travers l'épaisseur.

membrane : 0 cm (extrémité), 2.5 cm, 5 cm, et 10 cm (milieu). Ses figures montrent une allure presque linéaire de ces courbes durant la phase de chauffage infrarouge. Ce comportement linéaire en réalité ne doit pas être observé lorsque la température s'approche de la température de transition vitreuse de la membrane thermoplastique, qui est de l'ordre de 80 °C. En effet, au voisinage de la température de transition vitreuse, les propriétés thermophysiques du matériau PET varient avec la température ; et plus particulièrement celle de la chaleur spécifique. Une considération de ces propriétés avec la température devrait en principe expliquer cette différence.

Sur les Figures 13 et 14 nous avons tracées l'évolution de la température au centre de la membrane en fonction de l'épaisseur, respectivement, pendant les intervalles de temps de [0–4] secondes et de [5–35] secondes. Même remarque que précédemment, le profil de température suivant l'épaisseur induit l'établissement d'une différence de température de l'ordre de 7 °C entre les faces avant et arrière à la position centrale de la feuille.

4. Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons développé un outil numérique par la MEF3D pour étudier le chauffage infrarouge des mem-

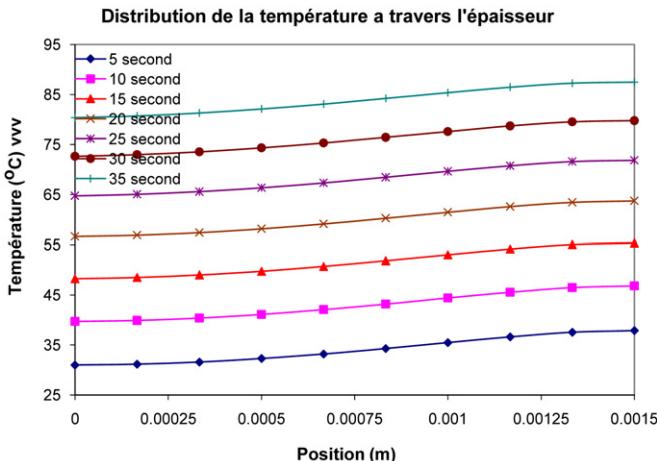


Fig. 14. Distribution de la température à travers l'épaisseur.

branes polymériques semi-transparentes de type PET. Cet outil prend en considération les propriétés des émetteurs infrarouges, les grandeurs spectrales moyennes du PET et l'absorption unidirectionnelle du rayonnement selon la loi de Beer–Lambert. Ce code nous a permis de montrer l'établissement d'un gradient constant de température entre la face avant et arrière de la feuille de PET lors du chauffage.

Soulignons que le terme source radiatif, qui intervient dans l'équation d'énergie, pourrait être modélisé en 3D par une méthode plus robuste, à savoir la méthode des ordonnées discrètes ou la méthode de zone. Cette dernière méthode a été retenue pour la suite de nos travaux futurs dans le domaine du chauffage infrarouge des préformes en PET.

Références

- [1] M.D. Shelby, Effects of infrared lamp temperature and other variables on the reheat rate of PET, in: Proceedings of ANTEC'91 Conference, 1991, pp. 1420–1424.
- [2] A. Yousefi, A. Bendada, R.W. Diraddo, Numerical modeling and experimental analysis of the reheat stage in thermoforming, *Polymer Engineering and Science* 42 (5) (2002) 1115–1129.
- [3] S. Monteix, Y. Schmidt, F. Le Maoult, R. Ben Yedder, R.W. Diraddo, D. Laroche, Experimental study and numerical simulation of preform or sheet exposed to infrared radiative heating, *Journal of Materials Processing Technology* 119 (2001) 90–97.
- [4] R. Bunyong, An investigation of initial polymer sheet heating processes during intelligent thermoforming, PhD thesis, University of Lehigh, 2003.
- [5] F. Erchiqui, A. Gakwaya, S. Souli, Non-isothermal finite element analysis of thermoforming of polyethylene terephthalate sheet, in: Proceedings of PPS'2006 Conference, 2006, Pretoria, South Africa, 2006.
- [6] M.A. Thrasher, Finite element modeling of radiant heating on polymeric materials, in: Proceedings of ANTEC'96 Conference, 1996, pp. 854–857.
- [7] A. Ambirajan, S.P. Venkateshan, Accurate determination of diffuse view factors between planar surfaces, *Int. J. Heat Mass Transfer.* 36 (8) (1993) 2203–2208.
- [8] H.C. Hottel, A. Sarofim, *Radiative Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [9] S.V. Pantakar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [10] R. Rammohan, Efficient evaluation of diffuse view factors for radiation, *Int. J. Heat Mass Transfer* 39 (1996) 1281–1286.
- [11] R. Siegel, J.R. Howel, *Thermal Radiation Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1992.
- [12] F. Erchiqui, N.G. Dituba, Analyse comparative des méthodes de calcul des facteurs de formes pour des surfaces à contours rectilignes, *Internat. J. Thermal Sci.* 46 (2007) 284–293.
- [13] J.N. Reddy, *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York, 1993.
- [14] M.A. Dokainish, K. Subbaraj, A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics, *Comput. Struct.* 32 (6) (1989) 1371–1386.
- [15] K. Esser, E. Haberstroh, U. Hüsgen, D. Weinand, Infrared radiation in the processing of plastics: Precise adjustment—the key to productivity, *Adv. Polymer Technol.* 7 (2) (1987) 89–128.
- [16] G. Venkateswaran, M.R. Cameron, S.A. Jabarin, Effect of temperature profiles through preform thickness on the properties of reheat-blown PET containers, *Adv. Polymer Technol.* 17 (3) (1997) 237–249.
- [17] Y. Le Maoult, F.M. Schmidt, V. Laborde, M. El Hafi, P. Lebaudy, Measurement and calculation of preform infrared heating: a first approach, in: Proceedings of the Fourth International Workshop on Advanced Infrared, 1997, pp. 321–331.
- [18] F. Kreith, *Principles of Heat Transfer*, second ed., International Textbook, Scranton Scranton, 1959.
- [19] E.M. Sparrow, A new and simpler formulation for radiative angle factors, *ASME J. Heat Transfer* 85 (1963) 81–88.
- [20] C.K. Krishnaprasas, View-factor evaluation by quadrature over triangles, *J. Thermophys. Heat Transfer* 12 (1) (1998) 118–120.
- [21] H.C. Hottel, Radiant heat transmission between surfaces separated by non-absorbing media, *Trans. ASME* 53 (1931) 265–273, FSP-53-196.
- [22] A. Feingold, Radiant-interchange configuration factors between various selected plane surfaces, *Proc. Roy. Soc. London, ser. A* 292 (1996) 51–60.
- [23] J.R. Ehlert, T.F. Smith, View Factors for perpendicular and parallel rectangular plates, *J. Thermophys. Heat Transf.* 7 (1993) 173–174.
- [24] A.B. De Vriendt, in: G. Morin (Ed.), *La transmission de la chaleur*, vol. 1, Chicoutimi, Québec, 1984.